

An abstract graphic consisting of a dark blue 3D cube with a red sphere resting on its top surface. The cube is positioned on the left side of the slide, and the sphere is centered on top of it.

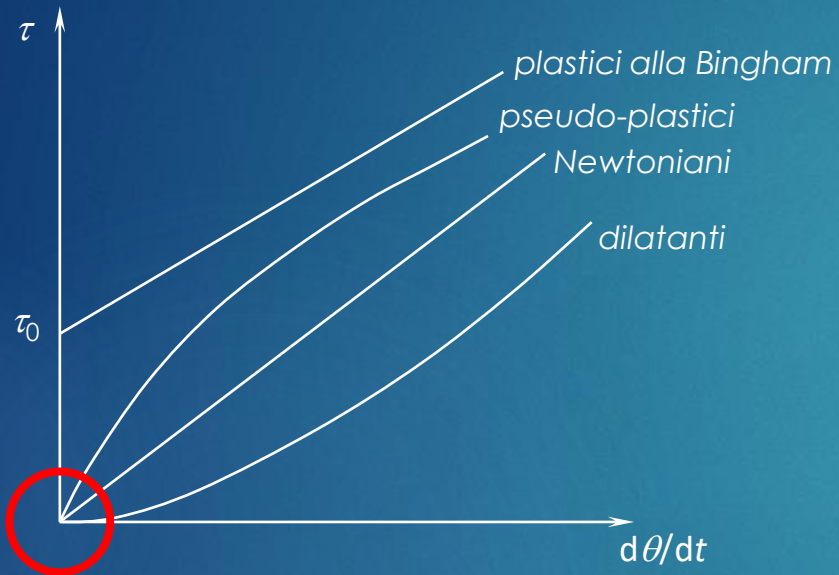
# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

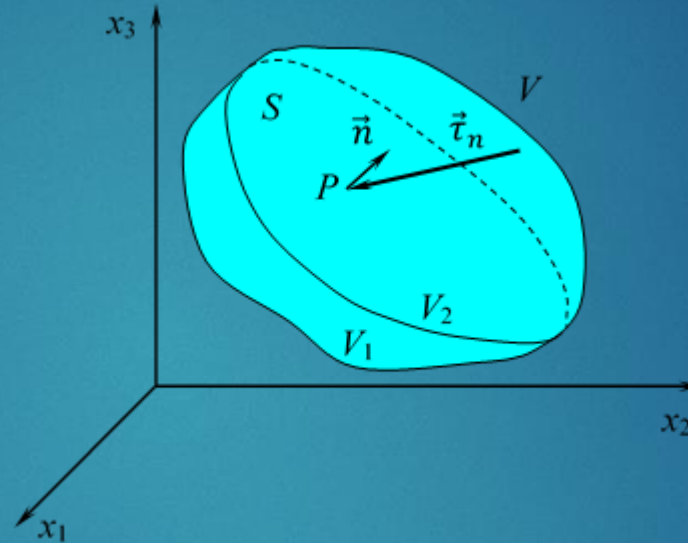
IDROSTATICA - 1

# Stato di sforzo idrostatico

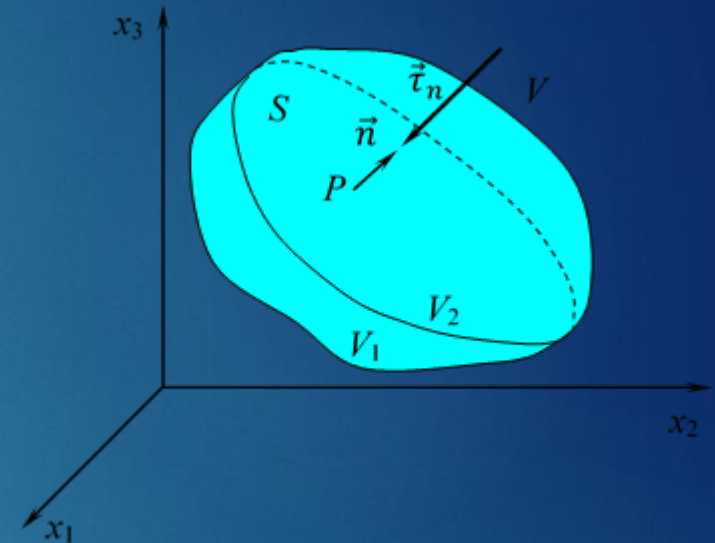
Curve reologiche



Fluido in movimento



Fluido in quiete



- Fluido in quiete  $\longrightarrow$  componenti tangenziali degli sforzi nulle  $\longrightarrow$  sforzi assiali (normali)
- La componente di sforzo assiale  $p$  non dipende dalla giacitura della superficie (si dimostra)
- $p$  = pressione nel punto (convenzione:  $p$  positiva corrispondente a sforzo di compressione)
- $\vec{\tau}_n = -p\vec{n}$  (normale esterna;  $p$  positiva se compressione)  $\longrightarrow$  risultante  $\vec{I} = -\int_S p\vec{n} dS$

# Equazione indefinita dell'Idrostatica

Equazioni *indefinite* (o *in forma locale*):

Equazioni differenziali valide in ogni punto della massa fluida

► Equazione indefinita per il punto P in figura

► Volume di controllo:

- Parallelepipedo elementare; lati infinitesimi
- facce ortogonali agli assi Cartesiani

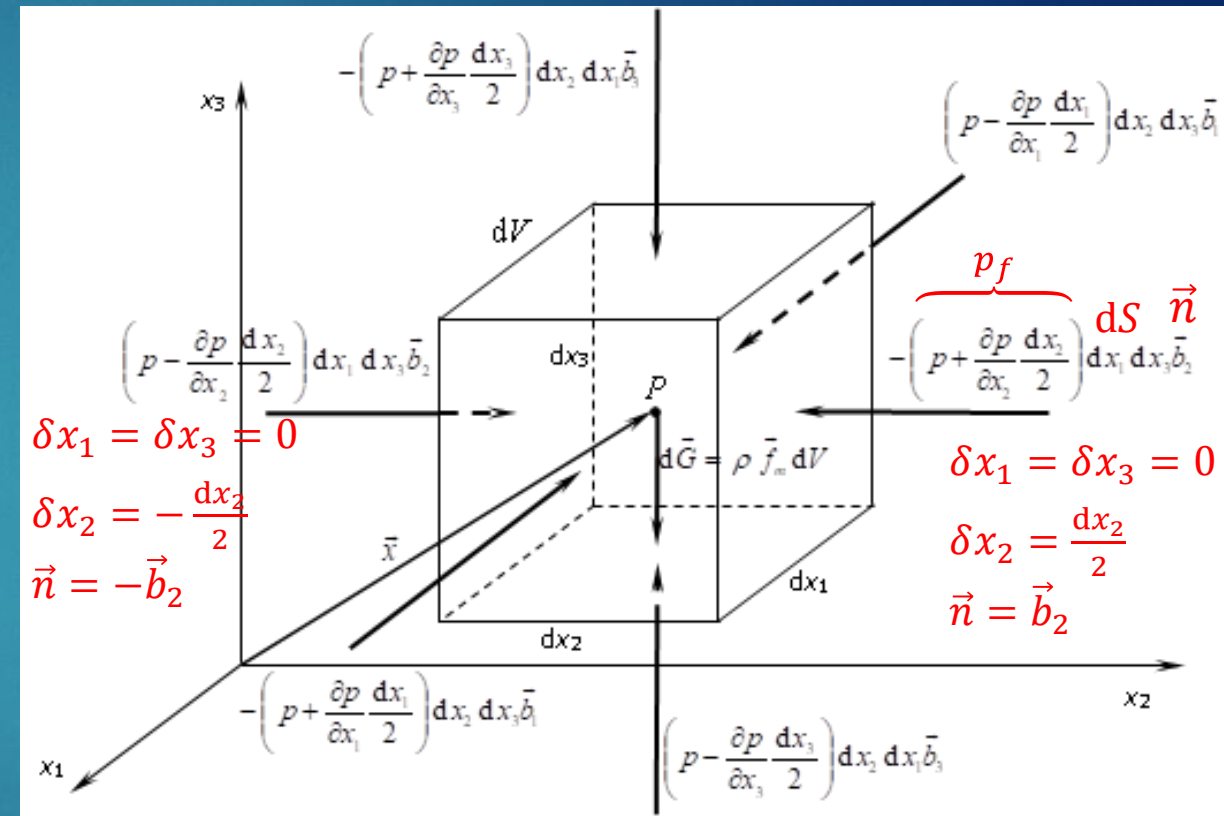
► 1° Eq.ne Cardinale della Statica ( $\vec{R}_e = 0$ )

- Forze di massa:  $d\vec{G} = \rho \vec{f}_m dV$
- Forze di superficie

– Normali esterne =  $\pm$  versori degli assi

– Pressioni su facce  $\approx$  costanti (superfici infinitesime)  $\Rightarrow \vec{\Pi} = - \int_S p_f \vec{n} dS \approx -p_f \vec{n} dS$

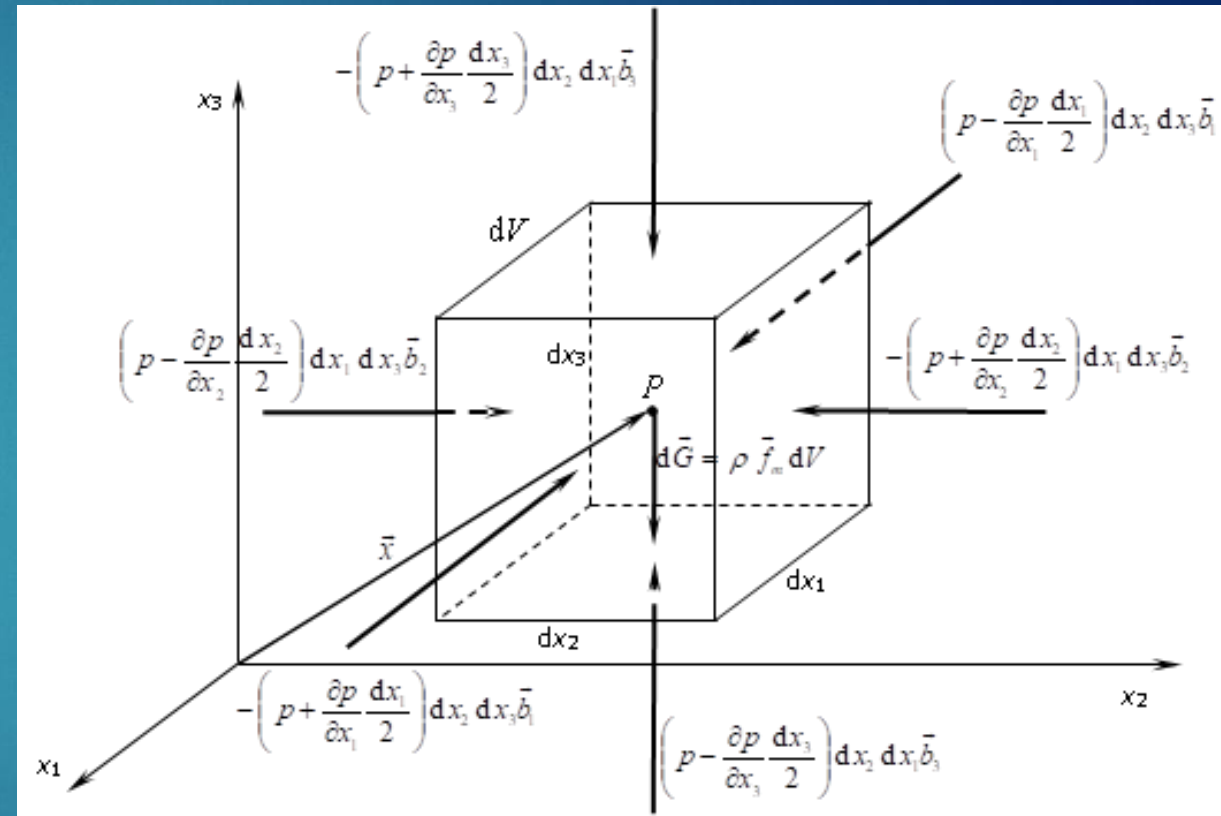
– Pressioni su facce  $p_f$  da sviluppi in serie di Taylor rispetto a pt. P:  $p_f = p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} \delta x_3$



# Equazione indefinita dell'Idrostatica

- Risultante delle forze di superficie:

$$\begin{aligned}
 d\vec{\Pi} = & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 \vec{b}_1 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2}\right) dx_2 dx_3 \vec{b}_1 + \\
 & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 \vec{b}_2 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 \vec{b}_2 + \\
 & -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 \vec{b}_3 + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2}\right) dx_1 dx_2 \vec{b}_3 = \\
 & -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{b}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} \vec{b}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} \vec{b}_3\right) dx_1 dx_2 dx_3 = -\nabla p \, dV
 \end{aligned}$$



- Forze di massa:  $d\vec{G} = \rho \vec{f}_m dV$

- 1° Equazione Cardinale dell'equilibrio ( $\vec{R}_e = 0$ )  $\Rightarrow \rho \vec{f}_m dV - \nabla p dV = 0 \Rightarrow$

$$\rho \vec{f}_m = \nabla p$$





# Equazione indefinita dell'Idrostatica

- Fluido pesante (forza peso unica forza di massa):

$$\vec{f}_m = -g\nabla z \Rightarrow -\rho g\nabla z = \nabla p$$

- ✓  $\nabla z \parallel \nabla p \Rightarrow$  le superfici sulle quali  $p=\text{cost}$  (superfici *isobariche*) sono i piani orizzontali
- ✓ La pressione aumenta al diminuire della quota  $z$

- Equazione proiettata sulla verticale (prodotto scalare per versore della verticale,  $\nabla z$ ):

$$\text{► } -\rho g\nabla z \cdot \nabla z = \nabla p \cdot \nabla z \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

$$dp = -\rho g dz$$

- Aeriformi (gas):  $\rho_{gas} \ll \rho_{liquidi}$

- ✓  $\rho_{aria} \cong 1,2 \text{ kg/m}^3$  ;  $\rho_{acqua} \cong 1000 \text{ kg/m}^3$
- ✓ volume di gas **poco** esteso in altezza  $\Rightarrow$  si possono trascurare le variazioni di pressione ( $p \approx \text{cost}$ )
- ✓ volume di gas **molto** esteso in altezza  $\Rightarrow$  la distribuzione delle pressioni  $p(z)$  si ottiene integrando l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{g} \frac{dp}{\rho(p)} = -dz \Rightarrow \frac{1}{g} \int \frac{dp}{\rho(p)} = -z + c$$

- $c$  = costante di integrazione
- il legame  $\rho = \rho(p)$  dipende dalla trasformazione termodinamica subita dal gas



# Fluidi pesanti incompressibili (i.i.o.)

► Equazione di stato:  $\rho = \rho(p, T, S)$

✓ Fluido incompressibile (liquido), isoterma ( $T=\text{cost}$ ) e omogeneo ( $S=\text{cost}$ )  $\Rightarrow \rho = \text{cost}$

► Fluido pesante, i.i.o. (per brevità incompressibile):

$$-\rho g \nabla z = \nabla p \Rightarrow -\nabla z = \frac{\nabla p}{\rho g} = \nabla \left( \frac{p}{\rho g} \right) = \nabla \left( \frac{p}{\gamma} \right) \Rightarrow \nabla z + \nabla \left( \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

$$\nabla \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}} \quad (\text{Legge di Stevin})$$

✓  $h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{quota piezometrica (o carico piezometrico)}$   $\begin{cases} z = \text{quota geodetica} \\ \frac{p}{\gamma} = \text{altezza piezometrica} \end{cases}$

✓ La quota piezometrica si calcola noto il valore di pressione in un punto di quota nota

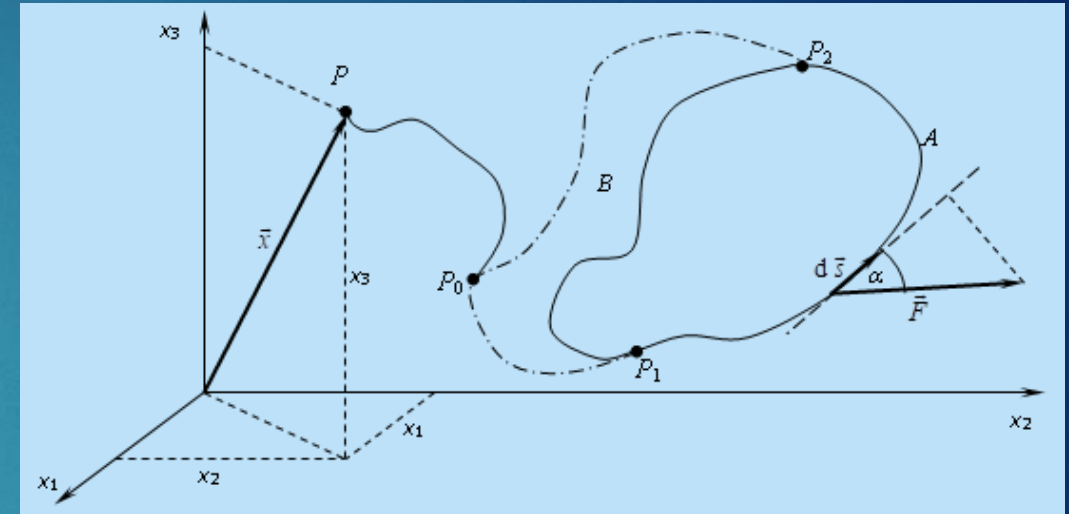
# Significato della quota piezometrica

- Richiamo di Meccanica (Campi di forze):

$$\vec{F} = \nabla \phi \quad \longrightarrow \quad d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \nabla \phi \cdot d\vec{s} = d\phi$$

$$\mathcal{L} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi_2 - \phi_1$$

Il lavoro delle forze del campo  $\vec{F}$  non dipende dal percorso  $\longrightarrow$  campo di forze CONSERVATIVO (potenziale  $\phi$ ; energia potenziale  $E = -\phi$ )



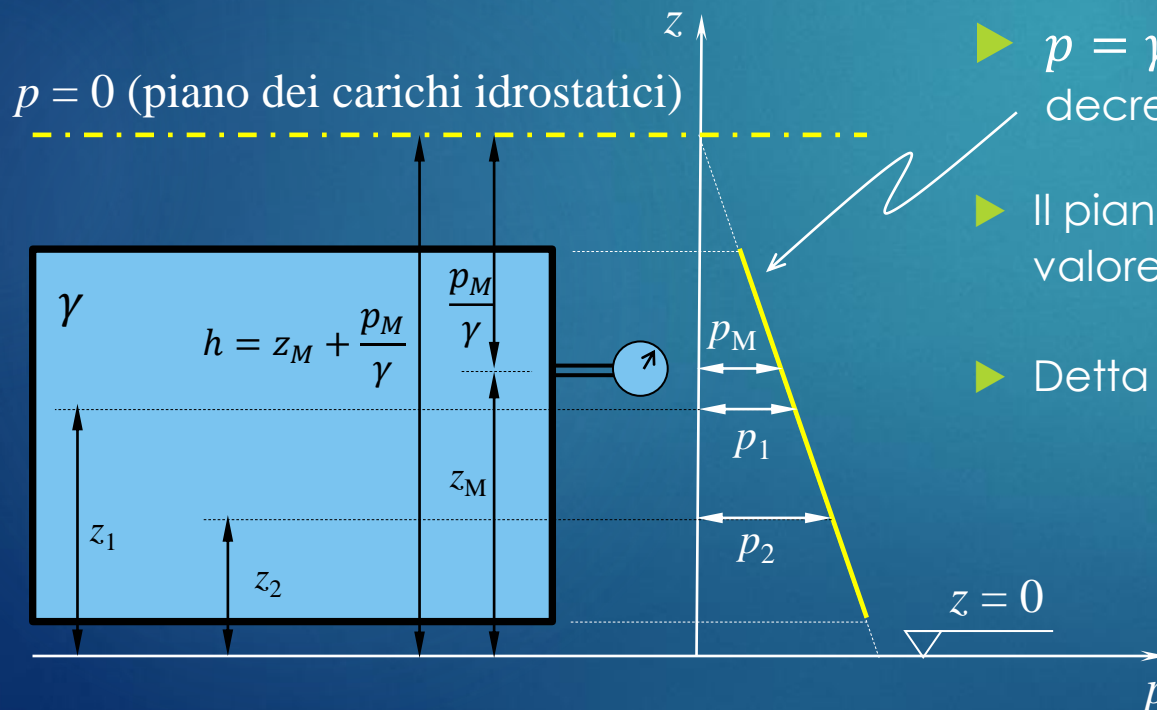
- Risultante forze di superficie per unità di peso:  $\frac{d\Pi}{dG} = \frac{1}{\gamma} \frac{dV}{dV} (-\nabla p) = \nabla \left( -\frac{p}{\gamma} \right)$  (adimensionale)
  - ✓ Il campo delle forze di pressione è conservativo (potenziale  $\phi = -\frac{p}{\gamma}$ ; energia potenziale  $E_p = \frac{p}{\gamma}$ )
  - ✓ Altezza piezometrica = energia del campo delle forze di pressione (per unità di peso di fluido)
- Energia potenziale del campo delle forze peso, per unità di peso di fluido:  $E_W = \frac{g \, dm \, z}{\gamma dV} = \frac{g \rho \, dV \, z}{\gamma dV} = z$
- Quota piezometrica  $h = z + \frac{p}{\gamma} = E_W + E_p = E_{tot}$  energia potenziale totale per unità di peso di fluido





# Distribuzione delle pressioni (Stevin)

- Ipotesi  $\rho = \text{cost}$   $\longrightarrow h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$  soltanto all'interno di uno stesso fluido (liquido)
- $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$   $\longrightarrow$  La quota piezometrica si calcola noto il valore di pressione in un punto di quota nota
- $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \longrightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \longrightarrow p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2)$  per qualunque coppia di punti



- $p = \gamma(\text{cost} - z) = \gamma(h - z)$  andamento lineare delle pressioni, decrescenti all'aumentare della quota
- Il piano orizzontale sul quale la pressione assume (o assumerebbe) valore nullo è detto piano dei carichi idrostatici (p.c.i. in breve)
- Detta  $z_0$  la quota del p.c.i. (p. orizzontale su cui  $p = p_0 = 0$ ), si ha:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z_0 = h = \text{cost}$$

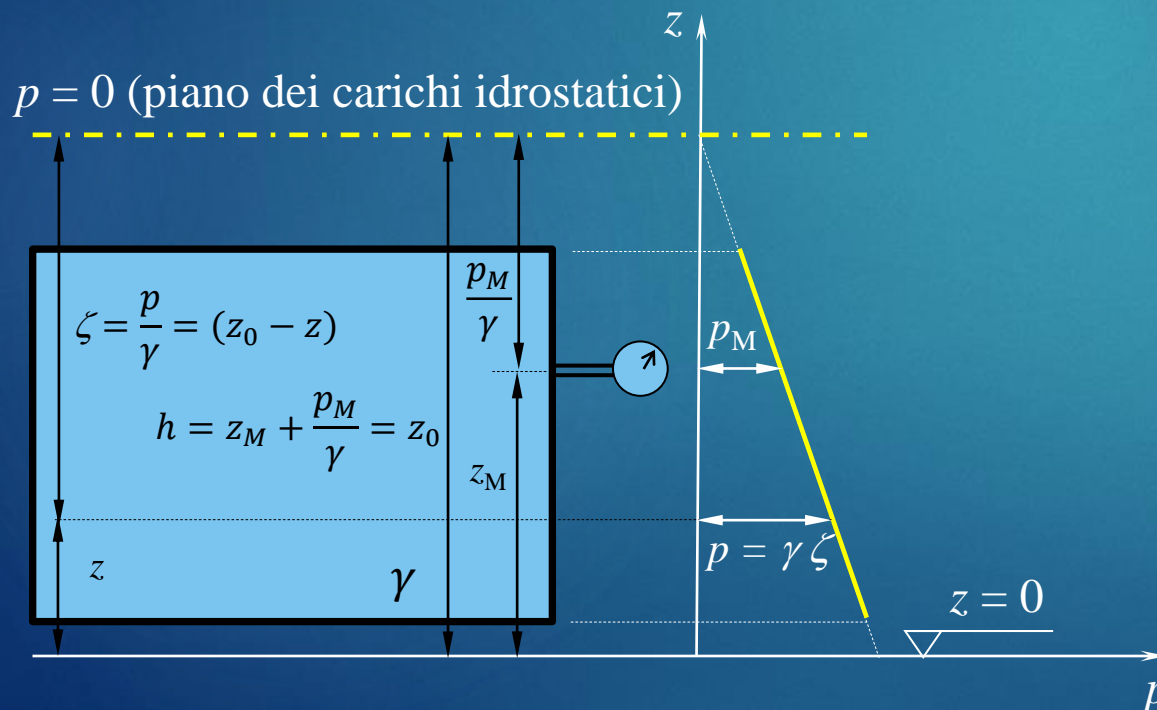
- ✓ Il valore costante della quota piezometrica è pari alla quota del piano dei carichi idrostatici





# Distribuzione delle pressioni (Stevin)

- Ipotesi  $\rho = \text{cost} \Rightarrow h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$  soltanto all'interno di uno stesso liquido
- $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \Rightarrow$  La quota piezometrica si calcola noto il valore di pressione in un punto di quota nota
- $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \Rightarrow p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2)$  per qualunque coppia di punti



►  $p = \gamma(\text{cost} - z) = \gamma(h - z) = \gamma(z_0 - z) = \gamma\zeta$

$$p = \gamma\zeta$$

- ✓  $\zeta = p/\gamma =$  affondamento del punto rispetto al p.c.i.
- ✓ Il p.c.i. rappresenta il riferimento principale per il calcolo delle pressioni in tutti i punti del liquido
- ✓ Utile anche  $p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2) \Rightarrow \Delta p = \gamma\Delta z$



# Pressioni assolute e pressioni relative

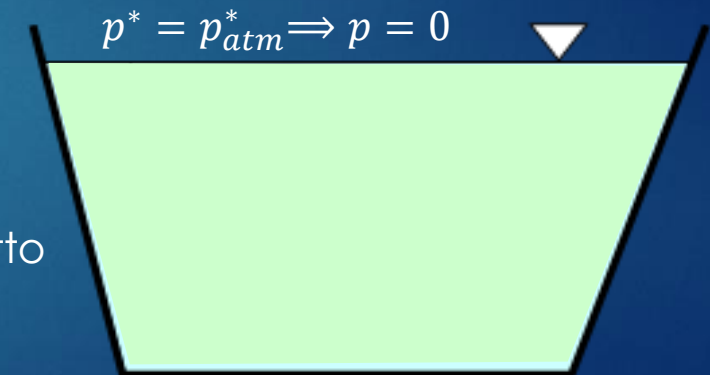
- Finora abbiamo implicitamente fatto riferimento alle pressioni viste in Termodinamica, p.es.:

$$pv = nRT \quad (\text{Equazione di stato dei gas perfetti})$$

- ✓  $p = 0$  nel vuoto o  $T=0$   $\longrightarrow$  piano dei carichi idrostatici non materializzabile ( $p < p_v^*$   $\longrightarrow$  vapore)
  - ✓ D'ora in avanti chiameremo queste pressioni pressioni assolute e le indicheremo con un asterisco:  $p^*$
  - ✓ Parleremo di quote piezometriche assolute, altezze piezometriche assolute e p.c.i. assoluti se riferiti a  $p^*$
- Definiamo una nuova scala delle pressioni (pressioni relative):

$$p = p^* - p_{atm}^*$$

- $p_{atm}^*$  = pressione atmosferica (valore normale  $p_{atm}^* = 101.325 \text{ Pa}$ )
- ✓  $p = 0$  dove  $p^* = p_{atm}^*$   $\longrightarrow$   $p = 0$  sulla superficie di un liquido a contatto con l'atmosfera (*pelo libero* o *superficie libera*)
- ✓ Sul p.c.i. assoluti  $p = -p_{atm}^*$





# Pressioni assolute e pressioni relative

- Verifichiamo qual è la distribuzione delle pressioni relative, partendo da quanto stabilito per le pressioni assolute  $p^*$  (le pressioni "vere", della Termodinamica)

$$h^* = z + \frac{p^*}{\gamma} = \text{cost}^* = z_0^* \quad ; \quad p^* = p + p_{atm}^* \longrightarrow z + \frac{p + p_{atm}^*}{\gamma} = z_0^* \longrightarrow z + \frac{p}{\gamma} = z_0^* - \frac{p_{atm}^*}{\gamma} = z_0$$

- Ripetendo i ragionamenti basati sulla Legge di Stevin riferita alle pressioni assolute, si ottiene:

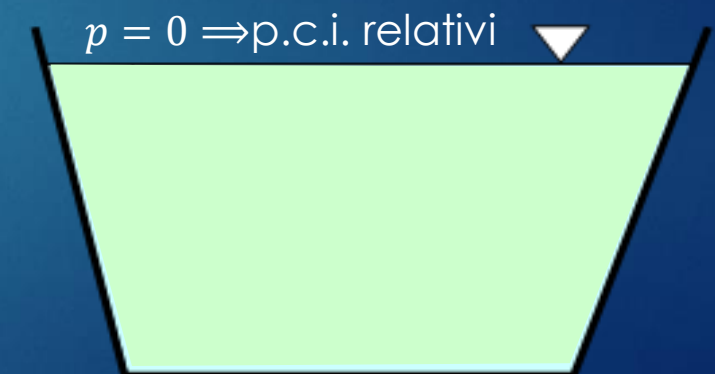
- $h = z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} = z_0 \longrightarrow p = 0$  sul piano orizzontale di quota  $z_0$  (p.c.i. relativi)

- ✓ Una superficie libera materializza il p.c.i. relativi del liquido

- ✓  $z_0^* - z_0 = \frac{p_{atm}^*}{\gamma} = \text{differenza di quota fra p.c.i. assoluti e relativi}$

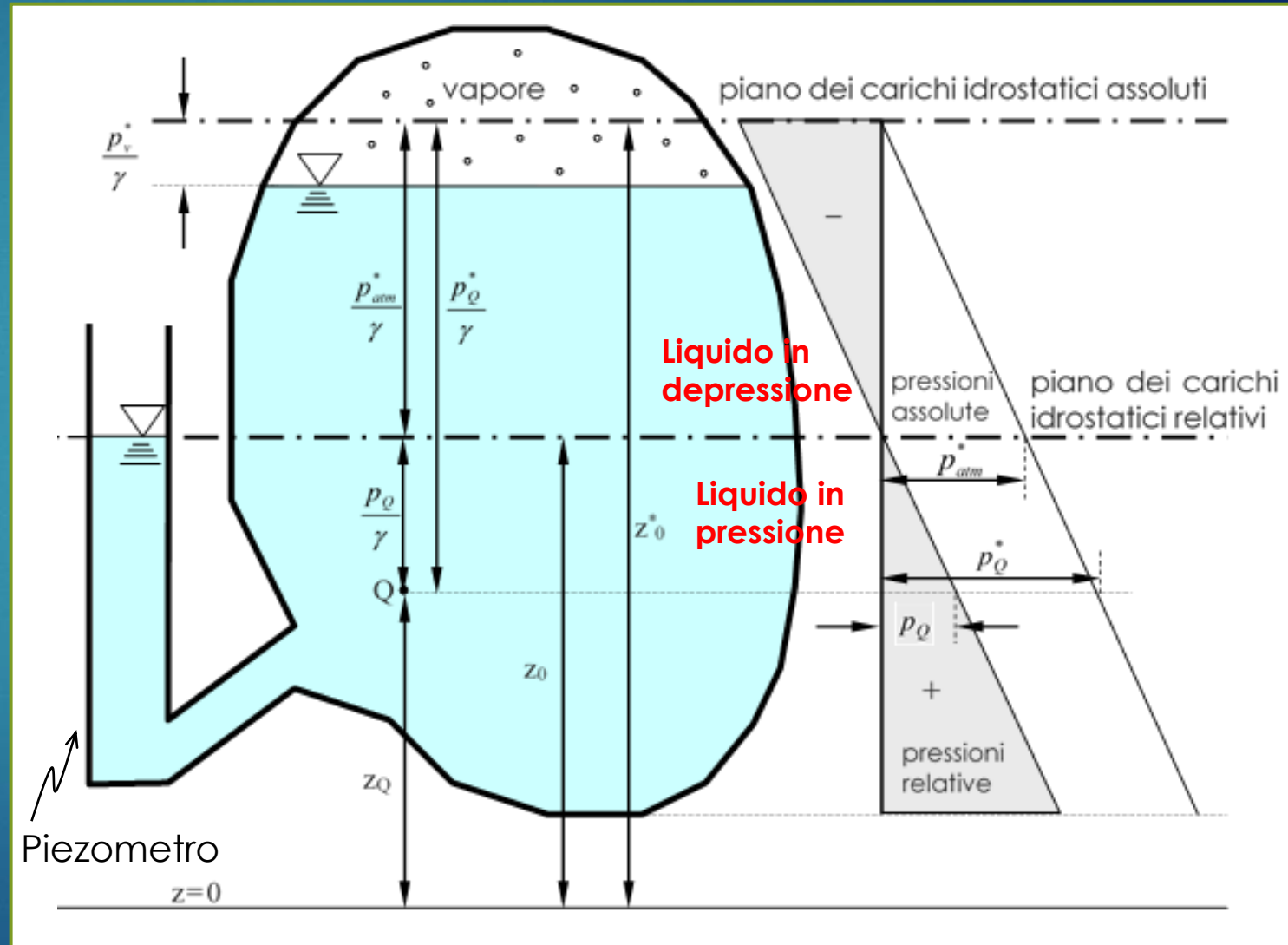
- ✓ Nel caso dell'acqua,  $\frac{p_{atm}^*}{\gamma} = \frac{101.325 \text{ Pa}}{9806 \text{ N/m}^3} = 10,33 \text{ m}$

- ✓ Nel caso del mercurio,  $\frac{p_{atm}^*}{\gamma} = \frac{101.325 \text{ Pa}}{132.871 \text{ N/m}^3} = 0,76 \text{ m} = 760 \text{ mm (Torricelli)}$



# Pressioni assolute e pressioni relative

- ▶ Diagrammi  $p$  e  $p^*$  paralleli
- ▶ p.c.i. relativi su pelo libero (menisco del piezometro)
- ▶  $p < 0$  per  $z > z_0$  (liquido in depressione)
- ▶  $p^* > 0$  ovunque
- ▶  $p^* < p_v^*$  ( $p < -p_{atm}^* + p_v^*$ )  $\Rightarrow$  vapore  
(Acqua a  $T=10^\circ\text{C} \Rightarrow \frac{p_v^*}{\gamma} = 0,125 \text{ m}$ )
- ▶ p.c.i. assoluti  $\frac{p_{atm}^*}{\gamma}$  al di sopra del p.c.i. relativi
- ▶  $\frac{p_{atm}^*}{\gamma} = 10,33 \text{ m}$  per l'acqua





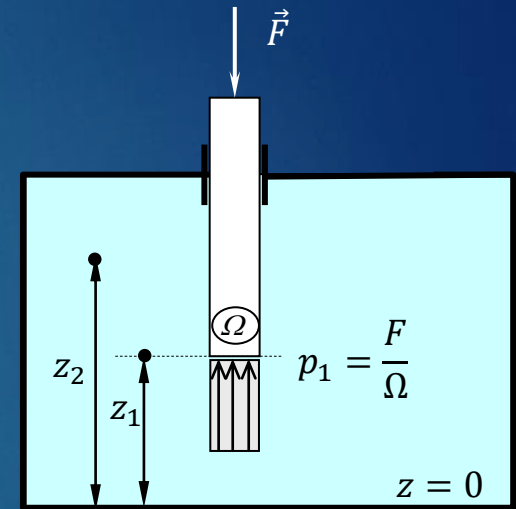
# Principio di Pascal

►  $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \quad \longrightarrow \quad z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad \longrightarrow \quad p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2)$

- Realizziamo, agendo sul pistone, un aumento di pressione  $\Delta p_1$  nel punto di quota  $z_1$ ; sulla base della Legge di Stevin si deve avere, per gli stessi punti:

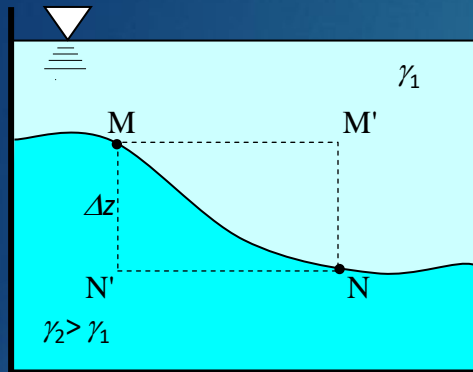
$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p'_2}{\gamma} \quad \longrightarrow \quad p'_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2) + \Delta p_1 = p_2 + \Delta p_1$$

$$p'_2 = p_2 + \Delta p_1$$

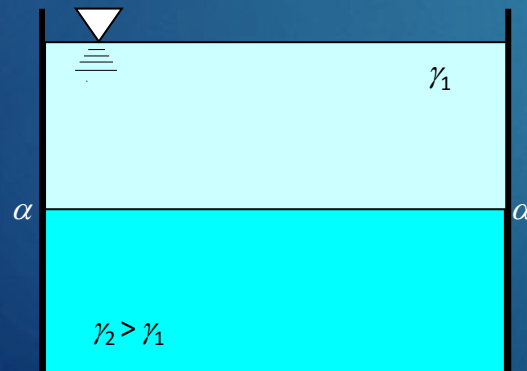


- ✓ Una variazione di pressione in un punto del liquido si risente, inalterata, in tutti gli altri punti della massa liquida (Principio di Pascal)

# Fluidi non miscibili sovrapposti



- ✓ Il liquido di peso specifico maggiore si dispone inferiormente (equilibrio stabile)



- Che forma deve possedere la superficie di separazione di due fluidi sovrapposti non miscibili ?
- Supponiamo una forma qualunque e verifichiamo se ciò è compatibile con la Legge di Stevin, applicata a ciascuno dei due liquidi
  - Riferimento a due punti M e N posti sulla superficie di separazione:

Liquido 1:  $p_N = p_M + \gamma_1 \Delta z$

Liquido 2:  $p_N = p_M + \gamma_2 \Delta z$

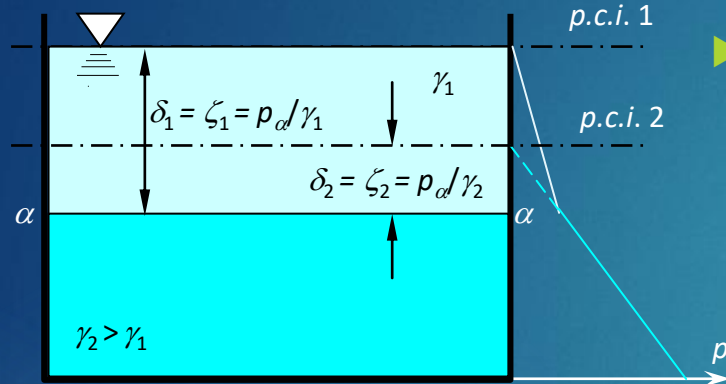
Sottraendo m. a m.  $0 = 0 + (\gamma_1 - \gamma_2) \Delta z$

- $\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow \Delta z = 0 \Rightarrow$  i punti della superficie di separazione devono trovarsi tutti alla stessa quota

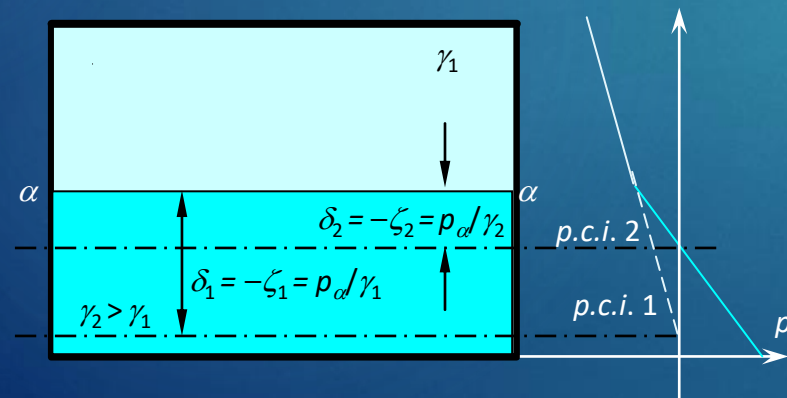
- ✓ La superficie di separazione di due liquidi non miscibili è un piano orizzontale



# Fluidi non miscibili sovrapposti



- ✓ Il liquido di peso specifico maggiore si dispone inferiormente (equilibrio stabile)



- Determinazione dei piani dei carichi idrostatici dei due liquidi
- La superficie libera del liquido 1 appartiene al suo p.c.i. (relativi)
  - La pressione di un punto della superficie di separazione  $\alpha-\alpha$  è data da:

$$p_{\alpha} = \gamma_1 \delta_1$$

- Lo stesso valore di pressione deve potersi ottenere in funzione dell'affondamento  $\delta_2$  (incognito) rispetto al p.c.i. del liquido 2):

$$p_{\alpha} = \gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2$$

- Si deduce la posizione del p.c.i. del liquido 2 rispetto al piano  $\alpha-\alpha$ :

$$\delta_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \delta_1$$

- ✓  $\gamma_2 > \gamma_1$  ➡ Il p.c.i. del liquido più pesante è il più basso dei due
- ✓ In generale il p.c.i. del liquido più pesante è il più vicino dei due al piano di separazione dei liquidi sulla superficie di separazione



# Strumenti di misura della pressione

## ► Piezometri

- ✓ Materializzano il piano dei carichi idrostatici relativi

## ► Manometri a fluido

- ✓ Fanno uso di un fluido manometrico, diverso dal fluido oggetto della misura
  - Semplici
  - Differenziali

## ► Manometri metallici

- Per pressioni assolute (semplici)
- Per pressioni relative (differenziali)





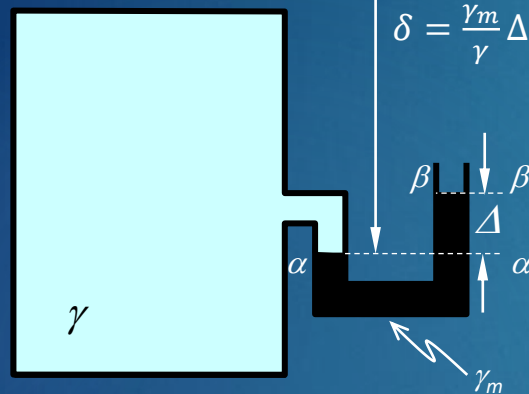
# Manometri semplici a fluido

FLUIDI IN PRESSIONE ( $\delta = \zeta_\alpha$ )

Stessa formula da applicare  
in quattro modi diversi: è  
necessario comprendere il  
ragionamento sottostante!!!

FLUIDI IN DEPRESSIONE ( $\delta = -\zeta_\alpha$ )

— piano dei carichi idrostatici liquido  $\gamma$  —

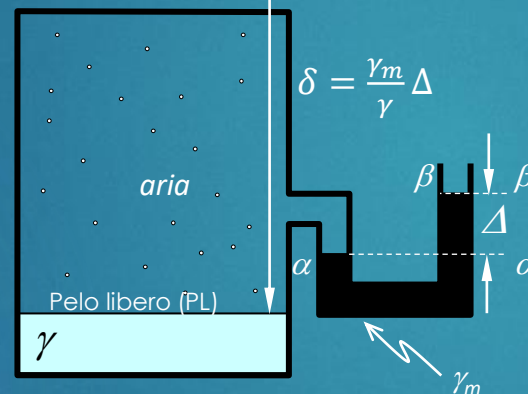


$$p_\alpha = \gamma_m \Delta = \gamma \delta$$

$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

$\delta$  incognito

— piano dei carichi idrostatici liquido  $\gamma$  —



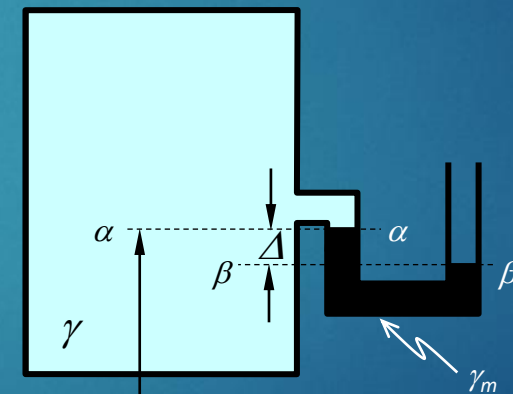
$$p_\alpha = \gamma_m \Delta = p_{aria}$$

$$p_{aria} = \text{cost} = p_{PL} = \gamma \delta$$

$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

$$p_\alpha = -\gamma_m \Delta = -\gamma \delta$$

$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$



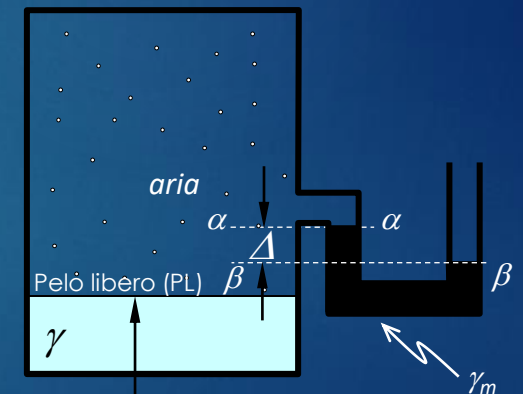
$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

— piano dei carichi idrostatici liquido  $\gamma$  —

$$p_\alpha = -\gamma_m \Delta = p_{aria}$$

$$p_{aria} = \text{cost} = p_{PL} = -\gamma \delta$$

$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$



$$\delta = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

— piano dei carichi idrostatici liquido  $\gamma$  —

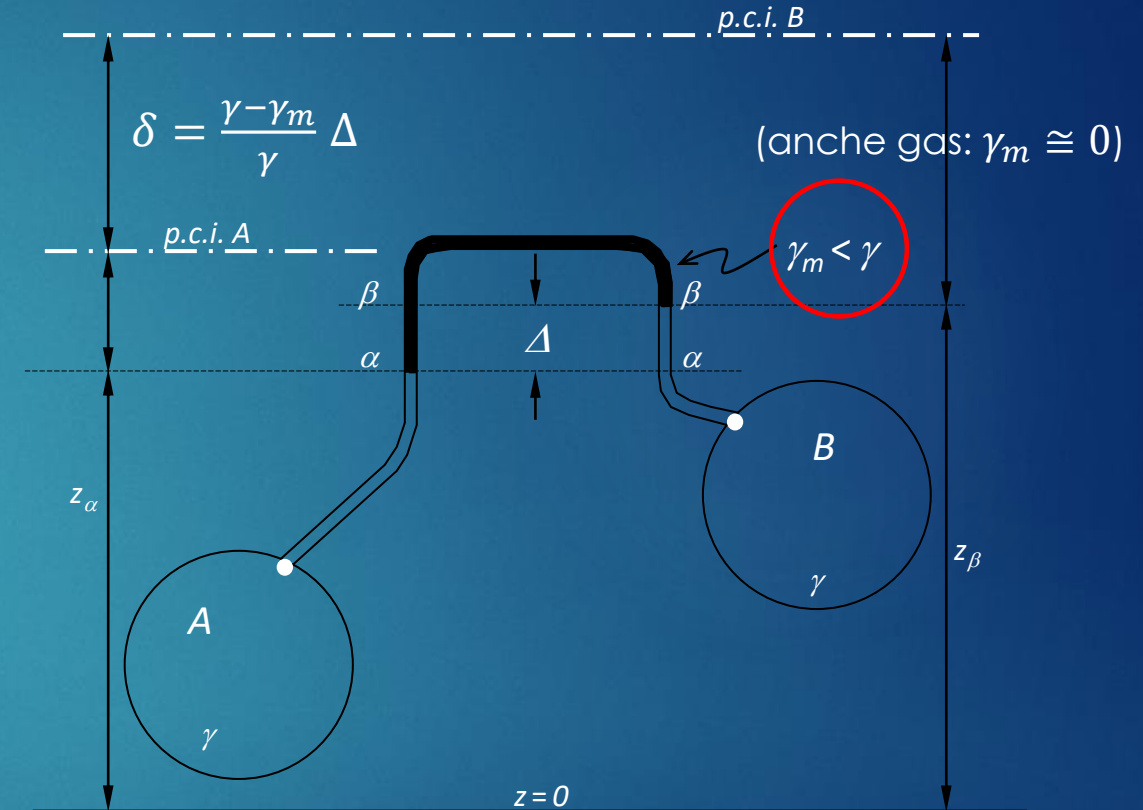
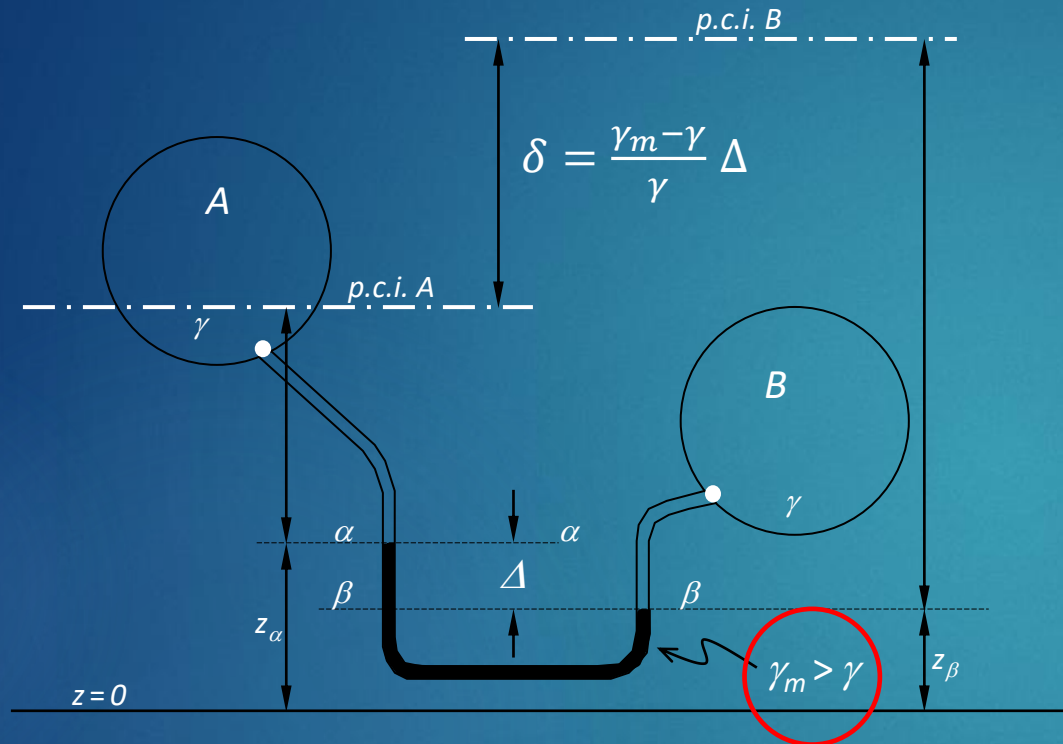
✓ Liquido acqua; liquido manometrico mercurio



$$\delta = \frac{132.871 \text{ N/m}^3}{9806 \text{ N/m}^3} \Delta = 13,5 \Delta$$



# Manometri differenziali a fluido



$$p_\beta = p_\alpha + \gamma_m \Delta \quad \longrightarrow \quad \frac{p_\beta}{\gamma} = \frac{p_\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

$$z_\beta - z_\beta + \frac{p_\beta}{\gamma} = z_\alpha - z_\alpha + \frac{p_\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta \quad \longrightarrow \quad h_\beta - z_\beta = h_\alpha - z_\alpha + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

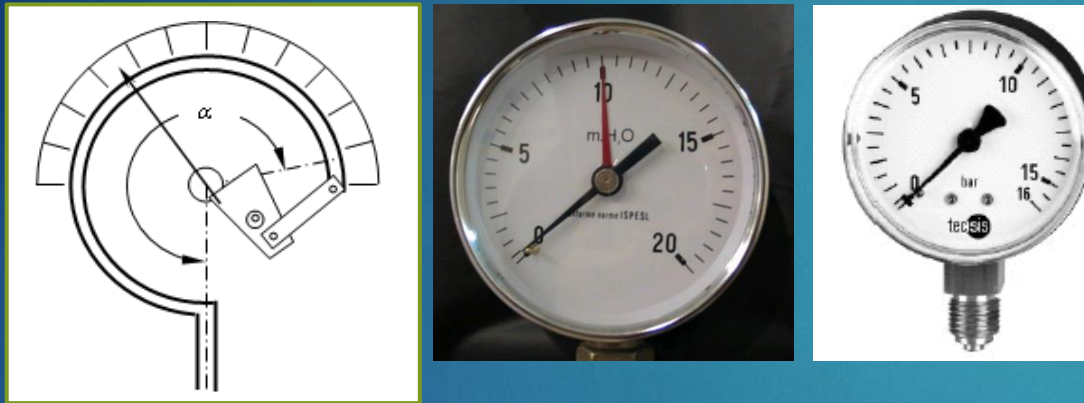
$$h_B - h_A = z_\beta - z_\alpha + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta \quad \text{con } z_\beta - z_\alpha = -\Delta \quad \longrightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta}$$

✓ Ragionando analogamente

$$\boxed{\delta = \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} \Delta}$$

# Manometri metallici

- Necessari per pressioni relativamente alte
- Tipo più diffuso: manometro Bourdon



- ✓ Il manometro misura la pressione alla quota del suo baricentro (punto di innesto non rilevante)
  - Tubo in alloggiamento sotto vuoto ➡ misura  $p^*$
  - Tubo in alloggiamento non stagno ➡ misura  $p$  (manometro differenziale: effetti antagonisti delle pressioni assolute del liquido – interna – ed atmosferica – esterna)

- ✓ In commercio si trovano manometri graduati in svariate unità non SI

| Unità di misura                               | Equivalenza                        |
|-----------------------------------------------|------------------------------------|
| Pa (N/m <sup>2</sup> )                        | –                                  |
| (kp/cm <sup>2</sup> )                         | 1 kp/cm <sup>2</sup> = 98.066,5 Pa |
| bar (bar)                                     | 1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa         |
| atmosfera (atm)                               | 1 atm = 101.325 Pa                 |
| metri di colonna d'acqua (m H <sub>2</sub> O) | 1 m H <sub>2</sub> O = 9.806,65 Pa |
| mm di mercurio (Torr)                         | 1 Torr = 133,3 Pa                  |

